31.11.02 manuel-schreiner@gmx.net
Mathematik
Manuel Schreiner

- Körper axiome $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- Gleichungen $a+x=b$; $a \cdot x = b$

$*: \forall a,b \in \mathbb{K} \ \exists! x: x+a=b$

Wir haben gezeigt: $x = b+(-a)$

- Eindeutigkeit:

Aussage: x ist die einzige Lösung

(Formel): $\forall x \in \mathbb{K}: [a+\hat{x}=b \wedge \hat{x} \neq b+(-a)]$

Gegenaussage: $\exists \hat{x}\ \mathbb{K}: [a+\hat{x}=b \wedge \hat{x} \neq b+(-a)]$

*1:

Tip: $\neg(\neg A \wedge B)$ Negation

$\hat{x} \overset{(A3)}{=} \hat{x}+0 \overset{(A4)}{=} \hat{x}+(a+(-a)) \overset{(A2)}{=} (\hat{x}+a)+(-a) \overset{*1}{=} b+(-a)$ ↯ Gegenaussage ist falsch

$\Rightarrow$ also ist die ursprüngliche Aussage wahr.

- auf gleiche Weise kann man zeigen:

$\forall a,b \in \mathbb{K}, a \neq 0 \ \exists! x: a \cdot x = b$

$\rightarrow$ weitere Rechenregeln auf ähnliche Weise

- Ordnungsrelation $(\mathbb{K},<)$

(A10) Es gibt genau eine der drei Beziehungen:

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

(A11) $a<b,\ b<c \Rightarrow a<c$

(A12) $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall c \in \mathbb{K}$

(A13) $a<b,\ 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

<u>Bemerkung</u>: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ erfüllen A1 – A13

Man nennt solche Körper $(\mathbb{K},<)$

<u>angeordnete Körper</u>

Archimedisches Axiom

(A 14) zu $x \in \mathbb{K}$, $y \in \mathbb{K}$ mit $x > 0$, $y > 0$
existiert ein $n \in \mathbb{N}: n \cdot x > y$
$(\forall x, y \in \mathbb{K}, x > 0, y > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}: n \cdot x > y)$

z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Def. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heisst nach oben beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ gibt $a \leq k$ für alle $a \in M$.
k heisst obere Schranke von M.
$(\exists k \in \mathbb{R} \; \forall a \in M: a \leq k)$
k ist obere Schranke von M und $\ell \geq k$
$\Rightarrow \ell$ obere Schranke

Def. Sei k_0 obere Schranke und k irgendeine obere Schranke wenn gilt $k_0 \leq k$,
so bezeichnet man k_0 als kleinste obere Schranke von M. $k_0 = \sup. M$ (Supremum von M)
Frage: gibt es immer ein Supremum?
Ersetze $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ in obiger Definition:
$M = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$
So hat diese Menge kein Supremum
$k_0 \in \mathbb{Q}$, denn sonst $k_0^2 = 2$

Vollständigkeitsaxiom

(A 15) jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum

d.h. z.B.:

$\sqrt{2} = \sup. \underbrace{\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 < 2\}}_{M}$

aber M hat kein maximales Element.

- Weitere Bsp.:

$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

$\sup M = 2 = \max. M$

$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

$\sup M = 2, \max \nexists$

Analoge Def.: nach unten beschränkt, größte untere Schranke: Infimum

$\mathbb{N}$ ist nicht oben beschränkt.

Angenommen dieses wäre falsch $\Rightarrow \exists\, k_0$ kleinste obere Schranke $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ n \leq k_0$.

Wenn es keine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > k_0 - 1$ gäbe, so wäre $\forall n \in \mathbb{N}: n \leq k_0 - 1$ $\lightning$ $k_0 = \sup.$

Also gibt es eine solche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$

$n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ und $n_0 + 1 > k_0$

$\mathbb{N}$ ist eine Menge, die nicht nach oben beschränkt ist.

$\mathbb{R}$ ist der einzige vollständige archimedisch angeordnete Körper

Rechenregeln und Vereinbarungen:

$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \dots + a_n$

$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot \dots \cdot a_n \quad \prod_{i=m}^{m} a_i = a_m$

$m > n \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = 0, \prod_{i=m}^{n} a_i = 1$

$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \quad k+1 = i, \ i = 1 \Rightarrow k = 0, \ i = n \Rightarrow k = n-1$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$

- $\left(\sum_{i=1}^{m} b_i \right) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} b_i c_k$

2.) Beweismethoden

- direkte Beweis:

  z.B. Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

  Beweis: $1 + 2 + 3 + \dots + n$

  $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$

  $(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$

- indirekte Beweis: (Widerspruchsbeweis)

  Gegenteilige Aussage formulieren und falsifizieren

- induktiver Beweis: (Vollständige Induktion)

zu zeigen Aussage $A(n)$ ist wahr

für alle $n \in \mathbb{N}$

1. Schritt: (Verankerung)

   zeige $A(n)$ ist wahr für ein $n = n_0$

2. Schritt: angenommen $A(k)$ ist wahr für ein $k \geq n_0$ (Induktionsannahme)

3. Schritt: (Induktionsschritt)

   zeige: $A(k+1)$ wahr

Beispiel: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $A(n)$

→ Beweis: $A($

1.) $A(1)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

2.) $A(k)$ wahr für ein $k \geq 1$

3.) $\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$

$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}$

Beispiel: Beh. $2^n > n^2 \ \forall n \geq 5$

Beweis: 1.) $A(5) = 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ✓

2.) $A(k)$ wahr für $k \geq 5$

3.) $A(k+1)$: $(2^{k+1} > (k+1)^2$

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \geq k^2 \cdot 2$

$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq k^2 + 2k + 1$

$\leq k^2 + 2k + k \leq k^2 + 3k$

$\leq k^2 + k \cdot k = 2k^2$ ✓

3) Mengen und Abbildungen

Mengen: $M = \{a, b, c, d\}$

Menge　　Elemente　　$a \in M$

Intervalle: $a, b \in \mathbb{R}$

$[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ $a \le b$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $a < b$ (offenes Intervall)

$[a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ $a < b$ (halboffenes Intervall)

$(a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ $a < b$ "

"∞ ≙ unendlich"

$[a;\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

$(-\infty; a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$

$(-\infty;\infty) = \mathbb{R}$

Def.: i) $A = B \Leftrightarrow A, B$ haben die gleichen Elemente

ii) A heisst Teilmenge von B,
in Zeichen $A \subset B$ wenn gilt $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$

iii) A ist die leere Menge, in Zeichen
$A = \emptyset$, falls A kein Element

iv) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$
$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$